Techniques « typiques » qu'il vaut mieux connaître

• Analyse

◦ Suites numériques

- ❏ étude d'une suite récurrente (du type $u_{n+1} = f(u_n)$) par l'étude de la fonction f, détermination des intervalles stables et signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$.

◦ Séries numériques

- ❏ détermination de la nature d'une série numérique par règle de comparaison
- ❏ calcul de la somme d'une série par téléscopage ou d'une série du type $\sum F(n)$ où F est une fraction rationnelle qu'on décompose en élèments simples
- ❏ faire une comparaison série intégrale
- ❏ utiliser le théorème des séries alternées après développement limité du terme général
- ❏ sommer les équivalents sur des restes ou des sommes partielles
- ❏ utiliser le lien suite-série : (u_n) est convergente $\iff$ $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge

◦ Intégration

- ❏ calculer une intégrale sur un segment (cf. fiche de « recettes », trinôme mis sous forme canonique, règles de Bioche, etc)
- ❏ étudier l'intégrabilité d'une fonction par règle de comparaison
- ❏ calculer une intégrale sur un intervalle quelconque par limite d'intégrale sur des segments

◦ Topologie

- ❏ montrer qu'une application est une norme
- ❏ montrer qu'une partie est fermée par caractérisation séquentielle, qu'une partie est fermée ou ouverte par image réciproque d'un fermé ou d'un ouvert par une application continue
- ❏ calculer la norme subordonnée d'une application linéaire

◦ Suites et séries de fonctions

- ❏ étudier la convergence simple/uniforme/normale (exemple de la fonction zêta)
- ❏ justifier la dérivation terme à terme d'une série de fonctions
- ❏ trouver l a limite par double limite ou minoration des sommes partielles (si limite finie)
- ❏ trouver un équivalent par comparaison série-intégrale

◦ Séries entières

- ❏ calculer un rayon de convergence par règle d'Alembert
- ❏ calculer une somme de série entière du type $\sum F(n)x^n$ où F est une fraction rationnelle qu'on décompose en élèments simples

- ❑ reconnaître le développement d'une fonction usuelle ou savoir écrire le développement d'une fonction usuelle (par exemple, $\ln(1+x) = ?$)
- ❑ trouver les solutions développables en série entière d'une équation différentielle linéaire

◦ Séries de Fourier

- ❑ calculer la série de Fourier d'une fonction périodique
- ❑ en justifier la convergence simple ou normale (théorèmes de Derichlet)
- ❑ utiliser les théorèmes de Derichlet et le théorème de Bessel-Parseval

◦ Suites et séries d'intégrales

- ❑ justifier un échange limite/intégrale ou série/intégrale
- ❑ écrire une intégrale sous forme de série (d'intégrales) puis la calculer

◦ Intégrales dépendant d'un paramètre

- ❑ trouver le domaine de définition (exemple de la fonction Γ)
- ❑ étudier la continuité ou la classe C^1
- ❑ trouver une équation différentielle linéaire dont elle est la solution
- ❑ déterminer sa limite (finie) par encadrement (cas simples) ou par caractérisation séquentielle et convergence dominée (cas général)

◦ Équations différentielles linéaires

- ❑ résoudre une EDL d'ordre 1
- ❑ résoudre un SDL d'ordre 1 à cœfficients constants ($X' = AX + B$) par réduction de la matrice A
- ❑ résoudre une EDL d'ordre 2 à cœfficients constants
- ❑ utiliser la variation des constantes (EDL2)
- ❑ trouver les solutions développables en série entière d'une équation différentielle linéaire
- ❑ résoudre toute l'équation par factorisation d'une solution qui ne s'annule pas (EDL2)

◦ Fonctions de plusieurs variables

- ❑ étudier la continuité (ou prolongement par continuité), l'existence des dérivées partielles, la classe C^1
- ❑ calculer des dérivées partielles composées jusqu'à l'ordre 2
- ❑ résoudre une équation aux dérivées partielles
- ❑ chercher les extrema locaux d'une fonction de deux variables réelles

• Algèbre linéaire

(s'entraîner en petite dimension)

- ❑ écrire la matrice d'une application linéaire
- ❑ déterminer le rang d'une matrice
- ❑ écrire la matrice d'une projection

- ❏ écrire une sous-espace vectoriel sour la forme de Vect
- ❏ trouver la base (anté)duale d'une base
- ❏ réduire une matrice (diagonalisation ou trigonalisation) utiliser un polynôme annulateur pour savoir si une matrice est diagonalisable ou pas, ce qu'on peut dire de ses valeurs propres, etc

• Algèbre bilinéaire

- ❏ montrer qu'une application est un produit scalaire
- ❏ écrire une matrice de projection orthogonale
- ❏ interpréter un problème de recherche de borne inf comme un problème de minimisation et savoir le résoudre par projection orthogonale
- ❏ trouver l'adjoint d'un automorphisme
- ❏ montrer qu'un endomorphisme est orthogonal
  en dimension 3, déterminer sa nature (rotation, etc) et ses élèments caractéristiques
- ❏ montrer qu'un endomorphisme ou une matrice est symétrique et le (la) diagonaliser en b.o.n.
- ❏ utiliser la diagonalisation d'une matreice symétrique (par exemple, si $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $A^{2011} = I_n$, alors $A = I_n$)
- ❏ écrire la matrice d'une forme quadratique
- ❏ utiliser la forme quadratique associée à une matrice symétrique pour prouver des inégalités (formes quadratiques (définies) poisitives notamment)

• Géométrie

- ❏ étudier la nature et tracer une conique ou une quadrique
- ❏ tracer une courbe en cartésiennes/polaires
- ❏ calculer la longueur d'une courbe ou trouver un repère de Frenet sur une courbe
- ❏ tracer le domaine d'intégration d'une intégrale multiple puis calculer cette intégrale